[redacted] – DM 13 niveau 4 :

Partie I : Incertitude des événements :

1) · A : "La carte tirée est la dame de coeur" ; il y a 32 cartes, d'où : $\boxed{P(A) = \frac{1}{32}}$

· Ensuite, $i(A) = \varphi(P(A)) = -\frac{\ln(P(A))}{\ln(2)} = \frac{-\ln(\frac{1}{32})}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^5)}{\ln(2)} = \frac{5\ln(2)}{\ln(2)}$ donc : $\boxed{i(A) = 5}$

2) · A : "obtenir n fois pile" / A_i : "obtenir pile au i-ème lancer". On considère que les lancers sont indépendants, et la pièce équilibrée donc $P(A_i) = \frac{1}{2}$. Alors :

$$P(A) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ d'où : } \boxed{P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

· $i(A) = \varphi(P(A)) = -\frac{\ln(P(A))}{\ln(2)} = \frac{-\ln(\frac{1}{2^n})}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^n)}{\ln(2)} = \frac{n\ln(2)}{\ln(2)}$ soit : $\boxed{i(A) = n}$

3) (i) Ω' événement quasi-certain, soit $P(\Omega') = 1$

Alors, $i(\Omega') = \varphi(P(\Omega')) = \frac{-\ln(P(\Omega'))}{\ln(2)} = \frac{-\ln(1)}{\ln(2)} = 0$. On a : $\boxed{i(\Omega') = 0}$

(ii) On a $\begin{cases} P(A) = P(\bar{A}) \\ P(A) = 1 - P(\bar{A}) \end{cases} \iff P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$

Alors : $i(A) = \varphi(P(A)) = \frac{-\ln(P(A))}{\ln(2)} = \frac{-\ln(\frac{1}{2})}{\ln(2)} = \frac{\ln(2)}{\ln(2)}$ soit : $\boxed{i(A) = 1}$

(iii) On a A et B indépendants et $A \cap B \neq \emptyset$ donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Alors, $i(A \cap B) = \varphi(P(A \cap B)) = \frac{-\ln(P(A \cap B))}{\ln(2)} = \frac{-\ln(P(A) \times P(B))}{\ln(2)} = \frac{-\ln(P(A))}{\ln(2)} + \frac{-\ln(P(B))}{\ln(2)} = i(A) + i(B)$

On a bien : $\boxed{i(A \cap B) = i(A) + i(B)}$

4) · Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ étant mutuellement indépendants, et sachant $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$, on a : $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$

On a alors : $i(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \varphi\left(P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = \frac{-\ln\left(P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)\right)}{\ln(2)} = \frac{-\ln\left(\prod_{i=1}^{n} P(A_i)\right)}{\ln(2)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\ln(P(A_i))}{\ln(2)}$ soit : $\boxed{i(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} i(A_i)}$

· Sur la question 2, on a vu : $P(A_i) = \frac{1}{2}$ d'où : $i(A_i) = \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{-\ln(\frac{1}{2})}{\ln(2)} = 1$

Par la formule trouvée, on a : $i(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \sum_{i=1}^{n} i(A_i) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$

Or, $i(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = i(A)$; on retrouve bien la valeur calculée en Q2 : $\boxed{i(A) = n}$

5) On a $A \subset B$ et $P(A) \neq 0$. Soit :

$P(A) \leq P(B) \iff \ln(P(A)) \leq \ln(P(B))$ (car ln est croissante, et on sait $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ car $P(B) \geq P(A)$)

$\iff \frac{-\ln(P(B))}{\ln(2)} \leq \frac{-\ln(P(A))}{\ln(2)}$

$\iff \boxed{i(B) \leq i(A)}$

6) $\varphi(x) = \dfrac{-\ln(x)}{\ln(2)}$; on sait $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc :

$\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = +\infty}$: lorsque la probabilité de réalisation d'un événement est très faible, son incertitude est très élevée.

Partie II : Incertitude d'une variable aléatoire discrète :

1) $U_n \sim \mathcal{U}(\llbracket 1 ; n \rrbracket)$, d'où $P(U_n = k) = \dfrac{1}{n}$

On a :
$$H(U_n) = \sum_{k=1}^{n} h(P(U_n = k))$$
$$= \sum_{k=1}^{n} -P(U_n = k) \times \frac{\ln(P(U_n = k))}{\ln(2)}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{n} \times \frac{\ln\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln(2)}$$
$$= \frac{1}{n} \frac{\ln(n)}{\ln(2)} \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$\boxed{H(U_n) = \frac{\ln(n)}{\ln(2)}}$$

2) On a
$$H(Z) = -P(Z=1)\frac{\ln(P(Z=1))}{\ln(2)} + \left(-P(Z=2)\frac{\ln(P(Z=2))}{\ln(2)}\right) + \left(-P(Z=3)\frac{\ln(P(Z=3))}{\ln(2)}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{\ln(4)}{\ln(2)} + \frac{1}{4}\frac{\ln(4)}{\ln(2)} + \frac{1}{2}\frac{\ln(2)}{\ln(2)}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{2\ln(2)}{\ln(2)} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{H(Z) = \frac{3}{2}}$$

On sait également $H(U_3) = \dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$. Or,

$$\frac{\ln(3)}{\ln(2)} - \frac{3}{2} = \frac{2\ln(3) - 3\ln(2)}{2\ln(2)}$$
$$= \frac{\ln(9) - \ln(8)}{2\ln(2)} > 0$$

D'où : $\boxed{H(Z) \leq H(U_3)}$

3) Si uni vaut 3 (probabilité $\frac{1}{3}$), alors y vaut 1 ou 2 (probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$) ; si uni vaut $\overbrace{1 \text{ ou } 2}^{(\text{probabilité } \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3})}$ alors $y = 3$

D'où :

k	1	2	3
$P(Y=k)$	$1/6$	$1/6$	$2/3$

On a : $E(X) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{6} + \dfrac{3.2}{3} = \dfrac{1+2+12}{6} = \dfrac{15}{6} \Rightarrow \boxed{E(Y) = \dfrac{5}{2}}$

Enfin, $H(Y) = -P(Y=1)\dfrac{\ln(P(Y=1))}{\ln(2)} + \left(-P(Y=2)\dfrac{\ln(P(Y=2))}{\ln(2)}\right) + \left(-P(Y=3)\dfrac{\ln(P(Y=3))}{\ln(2)}\right)$

$$= \frac{1}{6}\frac{\ln(6)}{\ln(2)} + \frac{1}{6}\frac{\ln(6)}{\ln(2)} + \frac{2}{3}\frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln(2)}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\ln(3)+\ln(2)}{\ln(2)}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\ln(3)-\ln(2)}{\ln(2)}\right)$$

$$\boxed{H(Y) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} - \frac{1}{3}}$$

4) • On a $h(x) = -x\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$; h est continue sur $]0;1]$, comme produit de fonctions continues sur $]0;1]$.

En 0, on a : $\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée donc $\lim_{x\to 0} h(x) = 0 = h(0)$: h est continue en 0

$\boxed{\text{Donc } h \text{ est continue sur } [0;1]}$

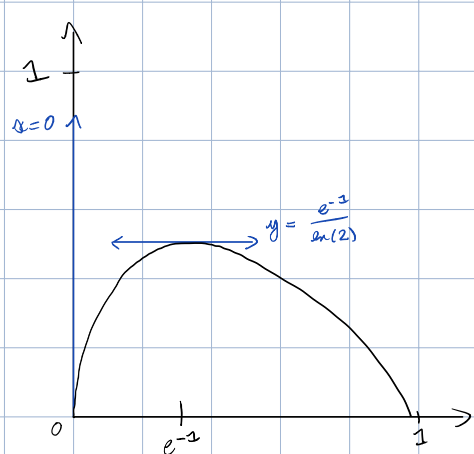
Sur $]0;1]$, $\ln(x) \leq 0 \iff x\ln(x) \leq 0$
$\iff -\dfrac{x\ln(x)}{\ln(2)} \geq 0$
$\iff h(x) \geq 0$

De plus, $h(0) = 0$ d'où : $\boxed{h \text{ est positive sur } [0;1]}$

• On a : $\lim_{x\to 0} \dfrac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-x\frac{\ln(x)}{\ln(2)}}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} = -\infty$: $\boxed{h \text{ n'est pas dérivable en } 0,\ \mathcal{C}_h \text{ admet une tangente verticale en } 0.}$

h est dérivable sur $]0;1]$ en tant que produit de fonctions dérivables, on a : $h'(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)} - x\dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\ln(2)} = \dfrac{-1}{\ln(2)}[\ln(x)+1]$

x	0		e^{-1}		1
signe de $\ln(x)+1$	||	$-$	0	$+$	
signe de $h'(x)$	||	$+$	0	$-$	
variations de h	0	$\nearrow$	$\frac{e^{-1}}{\ln(2)}$	$\searrow$	0



5) On a vu que h est positive sur $[0;1]$, or $P(X=k) \in [0;1]$ (c'est une probabilité)

Alors, $\sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X=x)) \geq 0 \Rightarrow H(X) \geq 0$.

Ensuite, $H(X) = 0 \Leftrightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} h(P(X=x)) = 0$, or h ne s'annule qu'en 0 et 1, d'où $P(X=x) = 0$ ou $P(X=x) = 1$: la probabilité vaut 0 pour toutes les valeurs de x sauf une, pour laquelle $P(X=x) = 1$: Autrement dit, $\boxed{X \text{ est une VA quasi-certaine}}$